

MAOAM

STACK for mathematics in engineering

Hendrikje Schmidpott-Schulz

Universität Kassel, Institut für Mathematik

15.November 2018

Our Project

Using STACK

Matrices

Calculus

What's to be done?

Content

Our Project

Using STACK

Matrices

Calculus

What's to be done?

What is MAOAM?

MAOAM stands for **M**athematische **O**nline **A**rbeitsmaterialien. We develop randomized exercises for students in engineering. We provide these exercises on the platform moodle where they will be generated and where the answers of our students can be evaluated with feedback automatically.

The Challenge

We've got 400 students of electrical engineering and computer science. Lectures are given in calculus, linear algebra and discrete structures.

Lectures, tutorials with small groups, homework, and individual tutoring is provided.

- ▶ Mathematics is considered 'necessary evil'.
- ▶ Homework is copied
- ▶ insufficient skills with basic calculations
- ▶ huge workload to mark homeworks and to give helpful feedback

We need:

- ▶ computer assisted assessments
- ▶ evaluation done by a CAS
- ▶ randomization

Our Setting

- ▶ moodle is the learning environment at Uni Kassel
- ▶ solid working environment for assessments
- ▶ STACK-Plugin for CAS-questions

For the moment we use our tools for practice purposes only. In the near future it will be a mandatory part of the homework.

Content

Our Project

Using STACK

Matrices

Calculus

What's to be done?

PRT Example

Gegeben ist das Gleichungssystem Frage nachbessern | Starte die Frage-Tests...

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & -10 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform:

Weiche Gestalt hat die Lösungsmenge des Gleichungssystems?

Abbildung: Perform the gaussian algorithm on the augmented matrix. Is there a solution?

Feedback

row reduced echelon form of given matrix equal to the students matrix?

number of non-zero lines = rank?

zeros under the main diagonal?

are the row reduced echelon forms of both matrices equal?

Where are the limits of STACK?

It is not possible to adapt the question to the students answer:

Problem

The solution is anticipated by the question.

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Frage nachbessern | Starte die Frage-Tests ...

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Die folgenden Variablen wurden gefunden: $[a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c]$

Better: Student tells the dimension → Matrix is provided

Where are the limits of STACK?

Deal with empty input fields.

Problem

PRTs will trigger if and only if all input fields used in the tree have a value.

Es sei Frage nachbessern | Starte die Frage-Tests...

$$U = \text{lin}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Es gilt $\dim(U) =$

Geben Sie eine Basis \mathcal{B} von U zu an:

$b^{(1)} =$

,

$b^{(2)} =$

,

$b^{(3)} =$

,

$b^{(4)} =$

,

$b^{(5)} =$

Geben Sie die Basisvektoren als `matrix([x1],[x2],[x3],[x4])` ein. Überzählige Vektoren müssen mit "existiert nicht" gekennzeichnet werden.

Content

Our Project

Using STACK

Matrices

Calculus

What's to be done?

Matrices

Easiest way to build a random matrix:

```
a[i, j]: rand_with_step(-max, max, 1);  
A: genmatrix(a, n, n)
```

To construct a invertible matrix we forbid zeros on the main diagonal and for each $a_{ii}, i > 1$ we we have to finds one single number besides zero, that is forbidden. we add:

```
a[1, 1]: rand_with_prohib(-max, max, [0]);  
a[2, 2]: rand_with_prohib(-max, max, [0,  
    (a[1, 2]*a[2, 1])/(a[1, 1])]);  
...
```

This value can be found with gaussian elimination.

Matrices

If $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ is a given invertible matrix, we can construct a matrix with our desired rank $r \leq n$.

Example

Let $A \in GL(3, \mathbb{K})$ and $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Now $A \cdot B$ is a

matrix of rank two that (usually) won't be recognized as singular instantly.

easily invertible matrices

Theorem

- ▶ A is invertible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- ▶ $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$

With a lower and an upper triangular matrix without zeros on the main diagonal.

```
make_regn_n(n,max):=block([L,R,i,j],
  L[i,j]:=0,
  R[i,j]:=0,
  for i:1 thru n do block(
    L[i,i]:rand_with_prohib(-max,max,[0]),
    R[i,i]:rand_with_prohib(-max,max,[0])),
  for i:1 thru n do
    for j:1 thru i do block(
      R[i+1,j]:rand_with_step(-max,max,1)
      ,
      L[n-i,n+1-j]:rand_with_step(-max,max,1)),
  L:genmatrix(L,n,n), R:genmatrix(R,n,n), L.R);
```

easily invertible matrices

Using Cramer's rule:

Theorem

For an inverse matrix A^{-1} of $A \in \mathbb{Z}^{n,n}$ with $\det(A) = \pm 1$ it is true that $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n,n}$.

If all elements of the main diagonals of L and R are one or minus one, the inverse matrix of $A = L \cdot R$ will only contain whole numbers.

Content

Our Project

Using STACK

Matrices

Calculus

What's to be done?

Content

- ▶ Basics
- ▶ Sequences and sums
- ▶ Differentiation
- ▶ Integration
- ▶ Power series
- ▶ Differentiation in \mathbb{R}^n
- ▶ Integrals in \mathbb{R}^n

Differentiation in \mathbb{R}^n

Students need to practice basic tasks:

Geben Sie den Gradienten von f mit
 $f(x, y, z) = (-x^2 - 3 \cdot x + 3) \cdot \sin((y - 5)^4)$ im Punkt $A = (0 \quad -5 \quad 4)$ an:
 $\nabla f(A) =$

<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
----------------------	----------------------	----------------------

Prüfen

Abbildung: calculate the gradient of a given function at a certain point

Randomization: select a random point A . Pick a random polynomial or exponential function $g_1(x)$, $g_2(y)$ and $g_3(z)$ and combine them rather randomly with trigonometric, exponential and polynomial functions.

Differentiation in \mathbb{R}^n

Feedback

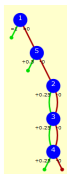


Abbildung: Feedback tree for the gradient

- ▶ every entry is correct, then student will receive full credit
- ▶ forgot to evaluate at point A ?
- ▶ else: partial credit for correct entries

Problem

Functions with singularities might cause conflicts with a random point A .

Extrema

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Geben Sie das charakteristische Polynom $P_A(x)$ an:

$P_A(x) =$

Geben Sie die Eigenwerte der Matrix an:

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_3 =$

Bitte geben Sie Eigenwerte mit einer algebraischen Vielfachheit größer eins entsprechend oft an, so dass alle Felder ausgefüllt werden.

Die Matrix ist somit:

Nicht beantwortet

Nicht beantwortet

positiv definit

positiv semidefinit, aber nicht positiv definit

negativ definit

negativ semidefinit, aber nicht negativ definit

indefinit

```
n:3
max:2
make_regn_n(n,max):=block([L,R,i,j], L[i,j]:=0, R[i,j]:=0, for i:1 thru n do
block(L[i,i]:rand([1,-1]), R[i,i]:rand([1,-1])), for i:1 thru n do for j:1 thru i do
block(R[j+1,j]:rand_with_step(-max,max,1), L[n-i,n+1-j]:rand_with_step(-max,max,1)),
L:genmatrix(L,n,n), R:genmatrix(R,n,n), L,R)
S:=make_regn_n(n,max)
d[i,j]:=if i=j then rand_with_step(-max,max,1) else 0
D:=genmatrix(d,n,n)
A:=S.D.invert(S)
px:=expand(charpoly(D,x))
ews:=makelist(D[i,i],i,1,n)
defart(li):=block([redli:[0,0,0],r,i], for i:1 thru length(li) do if li[i]=0 then redli[3]:1 else if
li[i]>0 then redli[1]:1 else redli[2]:1, if redli=[1,0,0] then r:1 else if redli=[1,0,1] then r:2
else if redli=[0,1,0] then r:3 else if redli=[0,1,1] then r:4 else if redli=[1,1,1] or redli=[1,1,0]
then r:5 else r:6,r)
defcor:=defart(ews)
defans:[[1,is(defcor=1),"positiv definit"],[2,is(defcor=2),"positiv semidefinit, aber nicht
positiv definit"],[3,is(defcor=3),"negativ definit"],[4,is(defcor=4),"negativ semidefinit, aber
nicht negativ definit"],[5,is(defcor=5),"indefinit"]]
```

Abbildung: Find the characteristic polynomial and calculate the eigenvalues. Decide whether it is definite.

Abbildung: Question variables

Extrema Feedback

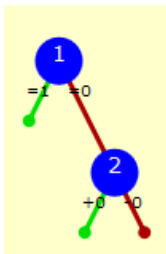


Abbildung: Is the polynomial correct? Is it even a polynomial with correct degree

Extrema

Feedback

```
ansli:sort([ans2,ans3,ans4])
tan:map(rhs,solve(ans1=0,x))
listcheck(li1,li2):=block([zv,zw],zv:sublist(li1, lambda([i],not(member(i,li2)))), zw:sublist(li2,
lambda([i],not(member(i,li1)))),[zv,zw]) /* erste Liste gibt falsche Antworten, zweite Liste
fehlende.*/
vgl:listcheck(ansli,tan)
```

Dieser potenzielle Rückmeldebaum wird aktiv, wenn Teilnehmende folgendes geantwortet hat: **ans1, ans2, ans3, ans4**

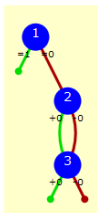


Abbildung: Feedback on the eigenvalues

Extrema Feedback

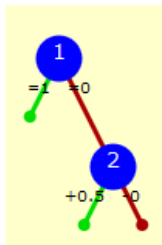


Abbildung: is the choice correct based on the calculated eigenvalues? Is it correct?

Integration in \mathbb{R}^n

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := 2y^2 + 3x$.

Berechnen Sie $\int_D 2y^2 + 3x \, d(x, y)$ auf dem Gebiet D das durch ein Kreissegment im ersten Quadranten des Kreises mit dem Radius $r = 1$ gegeben ist.

$$\int_D 2y^2 + 3x \, d(x, y) = \text{[]}$$

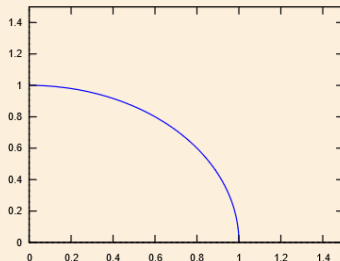
Abbildung: Calculate the Integral over the Area D given by the segment of a circle.

Random Function, Area varies

Integration in \mathbb{R}^n

Feedback

Zunächst müssen Sie das Gebiet visualisieren:



Sie können also x bzw. y als Funktion die von der jeweils anderen Variablen abhängt betrachten. Schreiben Sie nun das Integral als Doppelintegral, z.B.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1^2-x^2}} 2y^2 + 3x \, dy \, dx.$$

Abbildung: offers help, if the Answer is wrong.

Content

Our Project

Using STACK

Matrices

Calculus

What's to be done?

next steps

- ▶ motivate Students to work with our material
- ▶ always improve the questions and add new ones
- ▶ add basic group theory to the question pool
- ▶ work on inequalities

Evaluation

Our Colleagues Julia Gradwohl and Prof. Dr. Andreas Eichler evaluate our lectures and will (hopefully) verify that our students benefit from our materials.

Troubleshooting

The antiderivative of a given function is supposed to be calculated by substitution. The function to be integrated is generated of two random functions.

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \right) dx$$

Eine Stammfunktion lautet: $F =$

Prüfen

Abbildung: Find the antiderivative

Troubleshooting

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \right) dx$$

Eine Stammfunktion lautet: $F =$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert: x

Die folgenden Variablen wurden gefunden: $[x]$

Prüfen

Abbildung: A smart Student might do some simplifications...

Troubleshooting

Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \right) dx$$

Eine Stammfunktion lautet: $F =$

Ihre letzte Antwort wurde folgendermaßen interpretiert: x

Die folgenden Variablen wurden gefunden: $[x]$

Prüfen

Abbildung: A smart Student might do some simplifications...

Falsche Antwort.

Wenn Sie Ihre Funktion nach x ableiten, erhalten Sie 1, diese Funktion sollte aber mit $\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ übereinstimmen.

Sie können diese Aufgabe mit Substitution lösen. Setzen Sie $t = \cos(x)$ Dann gilt $\frac{dt}{dx} = -\sin(x)$ und $dt = -\sin(x)dx$. Nun können Sie $\int \cos(t)dt$ berechnen und t rücksubstituieren.

Abbildung: ...and will be marked wrong

Thank you!